Due esercizi di topologia

Esercizio 1 (i) Siano K e K' due sottoinsiemi compatti, non vuoti e disgiunti di $\mathbb{C}$ e sia

$$\mathrm{dist}(K,K') := \inf_{\substack{z\in K\\ z'\in K'}} |z-z'|\,.$$

Dimostrare che $\mathrm{dist}(K,K') > 0$ e che esistono due punti $z_0 \in K$ e $z_0' \in K'$ tali che

$$\mathrm{dist}(K,K') = |z_0 - z_0'|\,.$$

(ii) Dimostrare che le stesse affermazioni valgono anche se si assume che K e K' sono due sottoinsiemi chiusi, non vuoti e disgiunti di $\mathbb{C}$.

Esercizio 2 Sia Ω un aperto non vuoto di $\mathbb{C}$, $\delta > 0$ e

$$\Omega_\delta := \left\{z \in \Omega \,|\, \overline{D_\delta(z)} \subseteq \Omega\right\}.$$

Dimostrare che Ω_δ è aperto.

Suggerimento: Sia $\overline{D_\delta(z_0)} \subseteq \Omega$ e sia $C = \partial D_\delta(z_0)$.
(i) Per compattezza, esistono $z_1, \ldots, z_n$ punti di C e $r_j > 0$ tali che

$$C \subseteq A := \bigcup_{j=1}^{n} D_{r_j}(z_j) \subseteq \Omega\,.$$

(ii) Sia $r := \mathrm{dist}(C, \partial A)/2 > 0$. Dimostrare che

$$\overline{D_{\delta+r}(z_0)} \subseteq D_\delta(z_0) \cup A \subseteq \Omega\,,$$

e concludere che, per ogni z tale che $|z - z_0| < r$, $D_\delta(z) \subseteq \Omega$.